

CÁLCULO DE DISTRIBUCIÓN DE PESOS SOBRE LOS EJES DE CAMIONES

CASOS HIPERESTÁTICOS

Juan Carlos Olivieri

Ing. Mecánico

Universidad Tecnológica Nacional

Buenos Aires

República Argentina

ÍNDICE

1-INTRODUCCIÓN	1
2-PLANTEO DEL PROBLEMA	1
3-LA ELASTICIDAD DE LOS VÍNCULOS	2
4-CÁLCULO DEL COEFICIENTE DE ELASTICIDAD K DE LOS RESORTES EN SERIE EN CADA EJE	4
5-PLANTEO DEL PROBLEMA HIPERESTÁTICO	5
6-DETERMINACIÓN DE LA TARA DEL CAMIÓN P_t Y LAS COTAS l_t Y l_p	6
7-SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS APLICADA A LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA HIPERESTÁTICO	7
7-1 Objeto de este repaso de geometría plana	
7.2 Triángulos en Posición de Thales	
7.3 Triángulos semejantes	
8-DETERMINACIÓN DE LA TERCERA ECUACIÓN	9
9-ESTUDIO DE ALGUNOS CASOS REALES	11
10-COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS ANTERIORES CON EL CÁLCULO SIMPLIFICADO	13
11-DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES ELÁSTICOS PARA UN CAMIÓN DADO	14
12-SECUENCIA PARA LA DETERMINACIÓN DE LAS REACCIONES VINCULARES	17
13-GENERALIZACIÓN DEL MÉTODO DE CÁLCULO PARA EL CASO DE MÚLTIPLES EJES	18
14-DISTRIBUCIÓN DE PESOS SOBRE LOS EJES DE CAMIONES ARTICULADOS	19
14.1 Caso Tractor 4x2 y Semirremolque de dos ejes.	
14.1.1 Determinación del coeficiente ficticio K_z	
14.1.2 Cálculo de las reacciones vinculares totales en los ejes A, B, C y D	
14.2 Caso Tractor 6x2 ó 6x4 y Semirremolque de dos ejes	
14.2.1 Determinación del coeficiente ficticio K_z	
14.2.2 Cálculo de las reacciones vinculares totales en los ejes A, B, C, D y E	
14.3 Caso Tractor 4x2, 6x2 ó 6x4 y semirremolque de tres ejes.	
14.3.1 Planteo general	
14.3.2 Cálculo de las reacciones vinculares	
15-APÉNDICE	27

1-INTRODUCCIÓN

Para calcular la distribución de pesos de un camión de tres ejes, configuración 6 x 2 ó 6 x 4, es muy común que se suponga que se trata de una viga con dos apoyos, también llamada viga simplemente apoyada. El apoyo A es el que corresponde al eje delantero mientras que el apoyo B sería el punto medio de los dos ejes traseros (Fig.1).

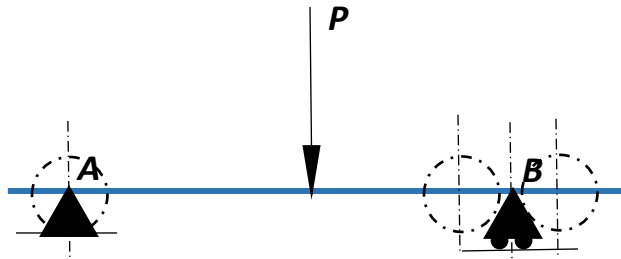


Fig.1

En realidad, esto no es rigurosamente exacto, sino que, en realidad, se trata de un **caso hiperestático** que podría asimilarse al de una viga sustentada por tres apoyos elásticos. Como veremos más adelante, considerar la viga como apoyada en dos puntos en lugar de tres, es una simplificación que podría llevarnos a cometer errores de cierta magnitud.

Ahora bien, antes de avanzar en el trabajo, es importante aclarar que este estudio se basa en suspensiones delanteras y traseras que cumplen con la **ley de Hooke**, de proporcionalidad entre las cargas y las deflexiones estáticas, típicamente suspensiones a resortes helicoidales o ballestas y, estas últimas, simples o principal más ballesta auxiliar o ballestín.

2-PLANTEO DEL PROBLEMA

Nos proponemos entonces tratar el problema como lo que es, es decir un caso hiperestático. Para conocer el valor de las reacciones de vínculo de un sistema plano de fuerzas paralelas con tres apoyos, es necesario adicionar **una tercera ecuación**, dado que tenemos **tres incógnitas**, R_A , R_B y R_C que corresponden a las tres reacciones vinculares. Entonces, a las dos ecuaciones de equilibrio $\sum F_y = 0$ y $\sum M_A = 0$ debemos adicionarle una más.

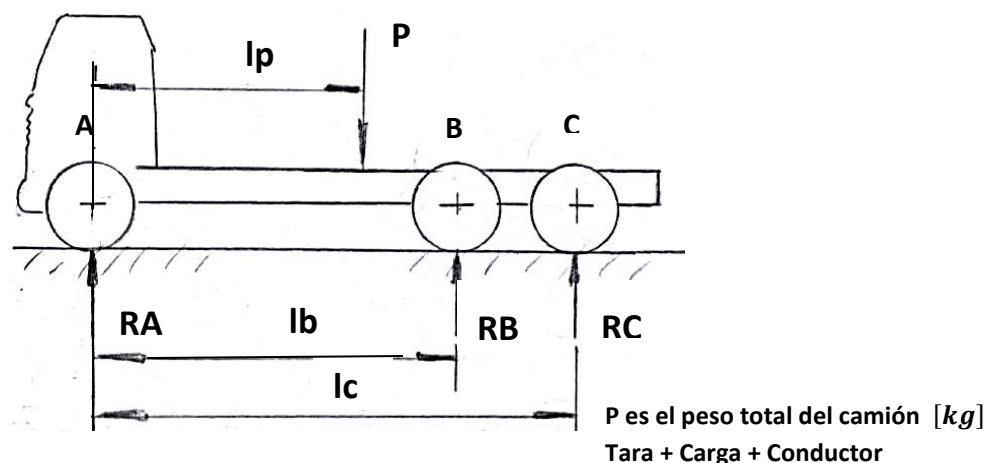


Fig.2

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow \boxed{RA + RB + RC = P} \quad (1)$$

$$\Sigma MA = 0 \rightarrow -lb RB - lc RC + lp P = 0$$

$$\text{Operando: } \boxed{RB + \frac{lc}{lb} RC = \frac{lp}{lb} P} \quad (2)$$

La tercera ecuación surge de considerar la elasticidad entre el vehículo y el suelo. El vínculo elástico está constituido por las ballestas, las cubiertas y, en menor medida, por las llantas. Por simplificación no se considera la elasticidad del resto de los componentes mecánicos del chasis y, además, supondremos que el vehículo está apoyado sobre un suelo rígido.

3-LA ELASTICIDAD DE LOS VÍNCULOS

En los puntos de referencia **A, B y C** ubicados en el canto superior del bastidor sobre la vertical que contiene a las reacciones, actúan dos resortes en serie. Uno representa al par de ballestas de cada eje y el otro a los conjuntos ruedas (neumáticos más llantas). Si el eje es de rodado simple serán dos ruedas y si es de rodado dual, cuatro.

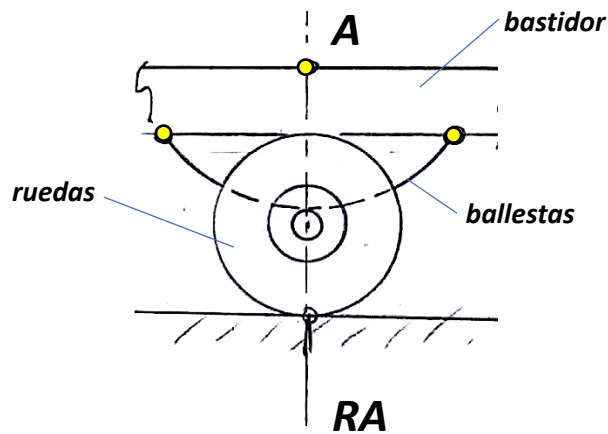


Fig.3

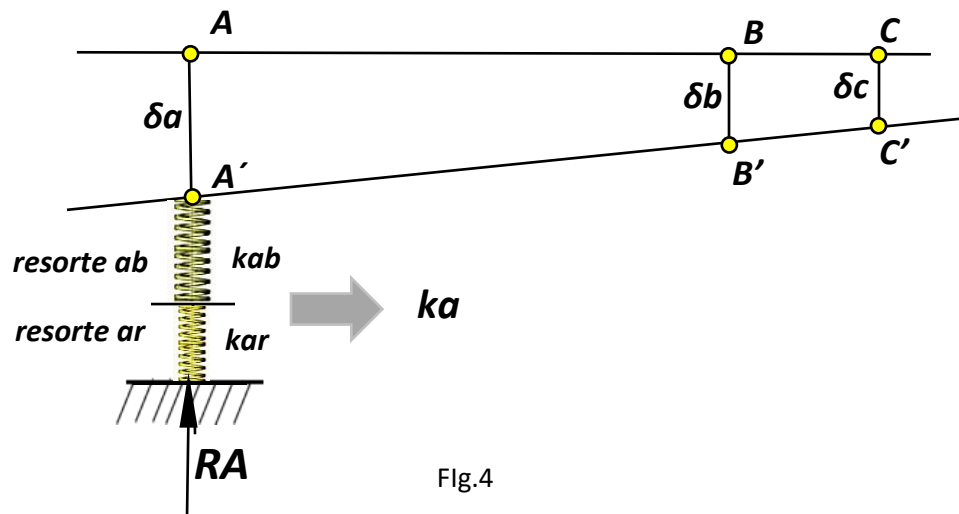


Fig.4

Las figuras (3) y (4) nos muestran los dos resortes, el **ab** que representa al par de ballestas y el **ar** que representa la elasticidad de las ruedas del eje considerado, siendo $ka \left[\frac{kgf}{mm} \right]$ la constante del resorte combinado de ambos resortes mencionados actuando en serie, en este caso sobre el eje A.

ka_b es la constante del resorte que representa a las dos ballestas b en el apoyo A y ka_r es la constante del resorte que representa la elasticidad de ambas ruedas en el apoyo A. δ_a es la deflexión del bastidor del camión en el punto A, δ_b en el punto B y δ_c en el C.

El resorte a_b tiene un comportamiento lineal, es decir la fuerza $F_{ab} [kgf]$ será:

$$F_{ab} = ka_b \cdot \delta_{ab} \quad (3)$$

El resorte a_r , representa la elasticidad del conjunto rueda (2 ruedas si el eje es de ruedas simples y 4 si es de ruedas dobles). La fuerza del resorte a_r sometido a compresión con cierta aproximación puede tomarse como una función lineal. Para determinar con mayor precisión este valor se requeriría de ensayos de compresión sobre el conjunto rueda, tal como se muestra en la Fig. 5, pero para nuestro estudio consideraremos solamente la deflexión estática de los neumáticos dejando de lado la pequeña deformación de las llantas.

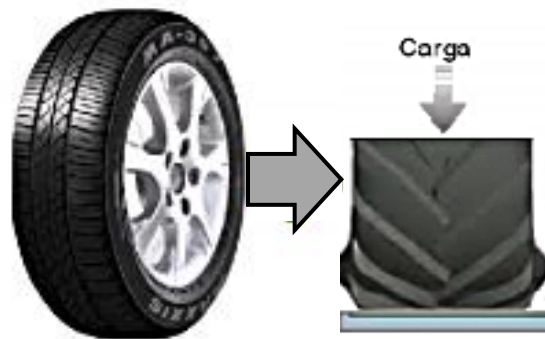


Fig.5

La deflexión estática surge como diferencia del radio del neumático sin carga menos el radio estático del mismo a la presión de trabajo recomendada por el fabricante.

Entonces, la expresión de la fuerza en función de la deflexión será:

$$F_{ar} = ka_r \cdot \delta_{ar} \quad (4)$$

4-CÁLCULO DEL COEFICIENTE DE ELASTICIDAD K DE LOS RESORTES EN SERIE EN CADA EJE

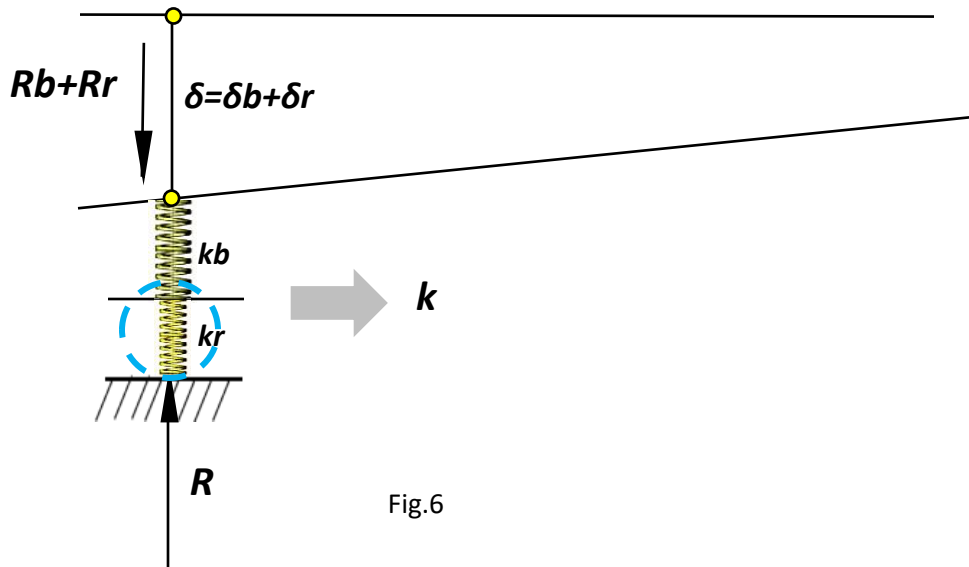


Fig.6

La deflexión total es la suma algebraica de la deflexión de las ballestas más la de las ruedas

δ = deflexión total [mm]

δb = deflexión de las ballestas [mm]

δr = deflexión de las ruedas [mm]

kb = constante elástica de las 2 ballestas actuando como resortes en paralelo $\left[\frac{kgf}{mm}\right]$

kr = coeficiente elástico del conjunto neumático – llanta (2 para ruedas simples, 4 para ruedas duales) $\left[\frac{kgf}{mm}\right]$

k = coeficiente elástico total de los dos resortes, kb y kr actuando en serie $\left[\frac{kgf}{mm}\right]$

R = Reacción de vínculo [kg] Rb =Fuerza ejercida por las ballestas Rr =Fuerza ejercida por las ruedas

$\partial = \partial b + \partial r$ ➡ La deflexión total es la suma algebraica de la deflexión de las ballestas más la de las ruedas

$$\frac{R}{k} = \frac{R}{kb} + \frac{R}{kr} \rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{kb} + \frac{1}{kr}$$

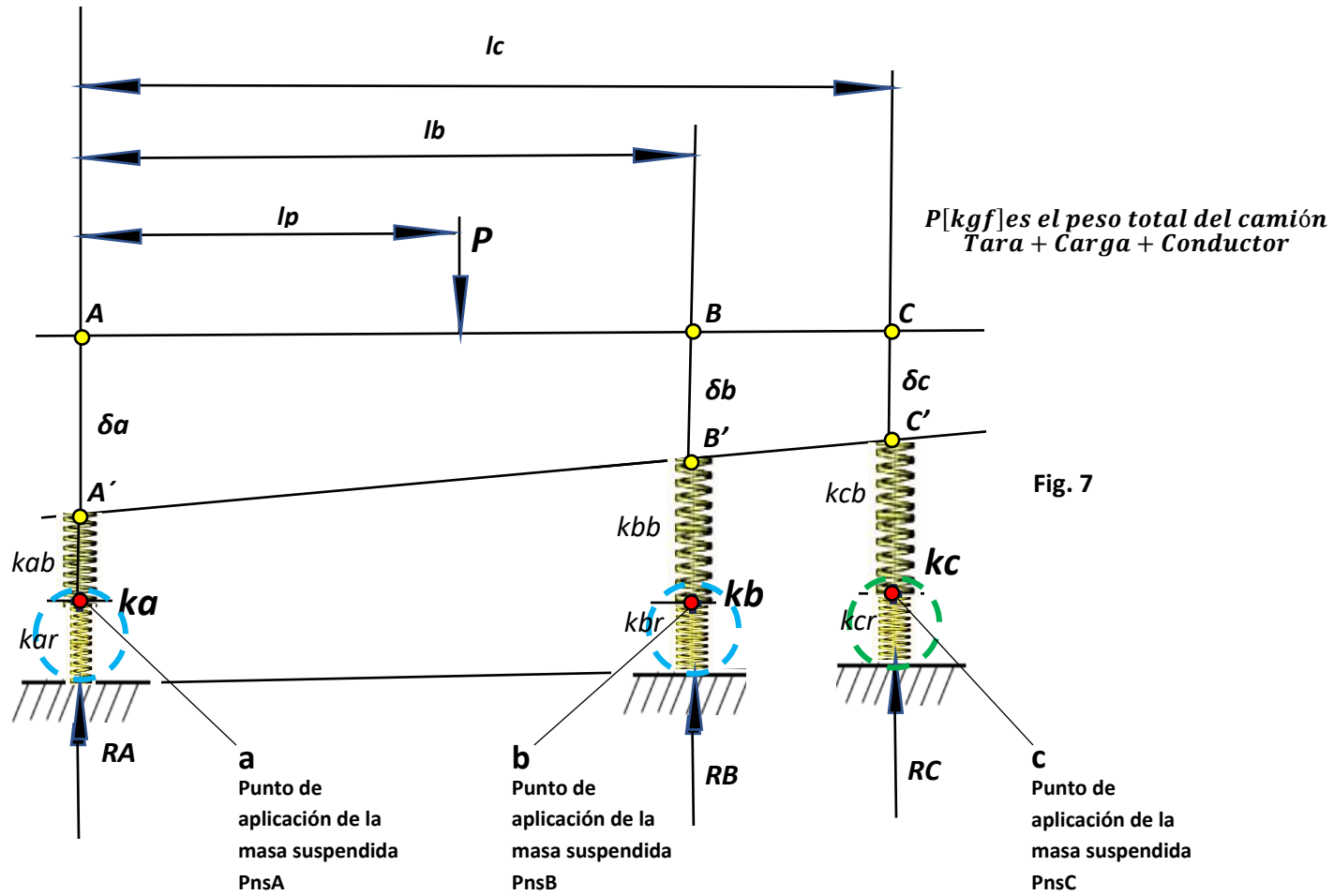
$$k = \frac{kb \cdot kr}{kb + kr}$$

(5)

La expresión (5) nos muestra la constante de elasticidad de los dos resortes actuando en serie, siendo k el coeficiente elástico del conjunto ruedas más ballestas para cada eje considerado.

5-PLANTEO DEL PROBLEMA HIPERESTÁTICO

La Fig.7 nos muestra esquemáticamente el chasis de tres ejes con sus correspondientes resultantes R_A , R_B y R_C .



Es importante mencionar que, en rigor, en lugar de tomar P como el peso total actuante sobre los apoyos elásticos en A, B y C debería desdoblarse P en una fuerza P_s correspondiente solamente a la **masa suspendida** y tres fuerzas P_{nsA} , P_{nsB} y P_{nsC} que corresponden respectivamente a las **masas no suspendidas** en A, B y C actuantes sobre las ruedas en los puntos **a**, **b** y **c** (ver Fig.7). Sin embargo, la simplificación adoptada no incide de manera significativa en el resultado, además de simplificar considerablemente el proceso de cálculo.

$$k_a = \frac{k_{ab} \cdot k_{ar}}{k_{ab} + k_{ar}} \quad (6)$$

$$k_b = \frac{k_{bb} \cdot k_{br}}{k_{bb} + k_{br}} \quad (7)$$

$$k_c = \frac{k_{cb} \cdot k_{cr}}{k_{cb} + k_{cr}} \quad (8)$$

6-DETERMINACIÓN DE LA TARA DEL CAMIÓN P_t , Y LAS COTAS l_t , Y l_p

Si no se dispone de especificaciones técnicas, debemos apelar a un **método empírico** que consiste básicamente en apoyar el eje delantero A sobre una base y el primer eje trasero B sobre otra base y esta última sobre una balanza precisa, de tal modo que podamos dejar en voladizo (sin tocar el suelo) el eje C (ver Fig.8). Luego, y previa comprobación de que el conjunto quede posicionado horizontalmente, mediante la balanza medimos la fuerza ejercida en el eje B para mantener el camión en equilibrio.

El motivo de dejar fuera de la medición el eje C es para resolver **el sistema isostático** compuesto por las reacciones vinculares R_A y R_B y la fuerza P_t . Nótese que en la figura hemos representado con líneas de trazos los otros pesos actuantes en el vehículo en orden de marcha, pero sólo como referencia. En esta determinación sólo consideraremos P_t y las reacciones R_{At} y R_{Bt} . Los otros pesos serán tomados en cuenta más adelante.

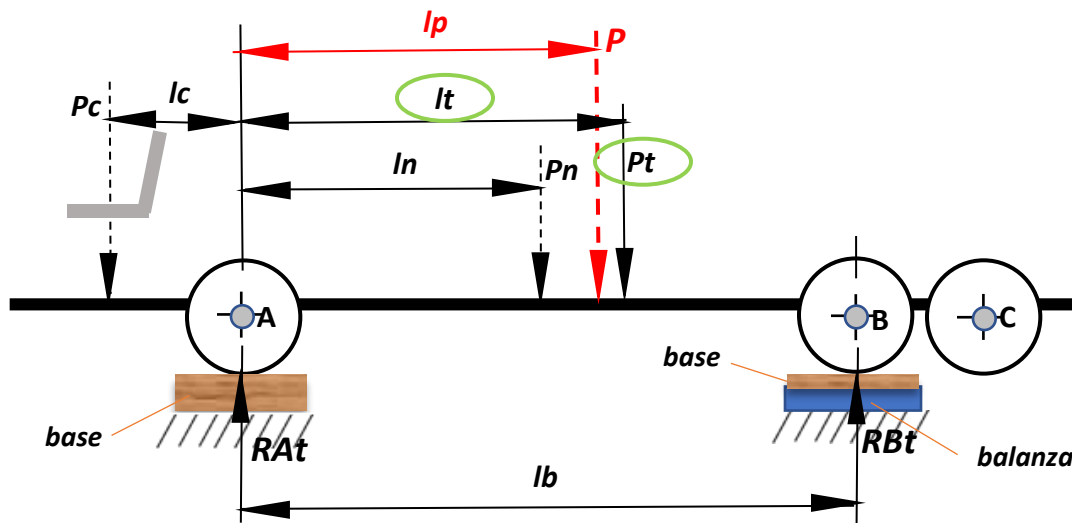


Fig.8

P =Peso Bruto Total, Tara + Carga + Peso del conductor [kgf]

P_t =Tara del camión con los depósitos de combustible a medio repostar [kgf]

P_n =Carga neta [kgf]

P_c =Peso del conductor, tomamos 80 kgf

R_{At} , R_{Bt} = Reacciones vinculares correspondientes a la acción de P_t exclusivamente [kgf]

Planteamos las ecuaciones de equilibrio para P_t , R_{At} y R_{Bt} :

$$\sum M_A = 0$$

$$-R_{Bt} \cdot l_b + P_t \cdot l_t = 0$$

$$l_t = \frac{R_{Bt} \cdot l_b}{P_t} \quad (9)$$

La tara P_t para introducir en (9) se obtiene pesando la unidad, ahora sí, con sus tres ejes A, B y C apoyados sobre la balanza. Finalmente, conociendo el valor de P_c , P_n y P_t podemos calcular P y l_p al ser P la resultante de un sistema de tres fuerzas paralelas.

7-SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS APLICADA A LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA HIPERESTÁTICO

7-1 Objeto de este repaso de geometría plana

Utilizaremos lo que sigue como una **herramienta necesaria** para la determinación de la tercera ecuación buscada para resolver nuestro problema hiperestático de n ecuaciones con n incógnitas que, en el caso particular aquí estudiado es $n=3$.

7.2 Triángulos en Posición de Thales

Se dice que dos o más triángulos están en **posición de Thales** cuando tienen un ángulo común y los lados opuestos a ese ángulo son paralelos. Si dos o más triángulos se pueden colocar en **posición de Thales** entonces **son semejantes**, ver Fig.9.

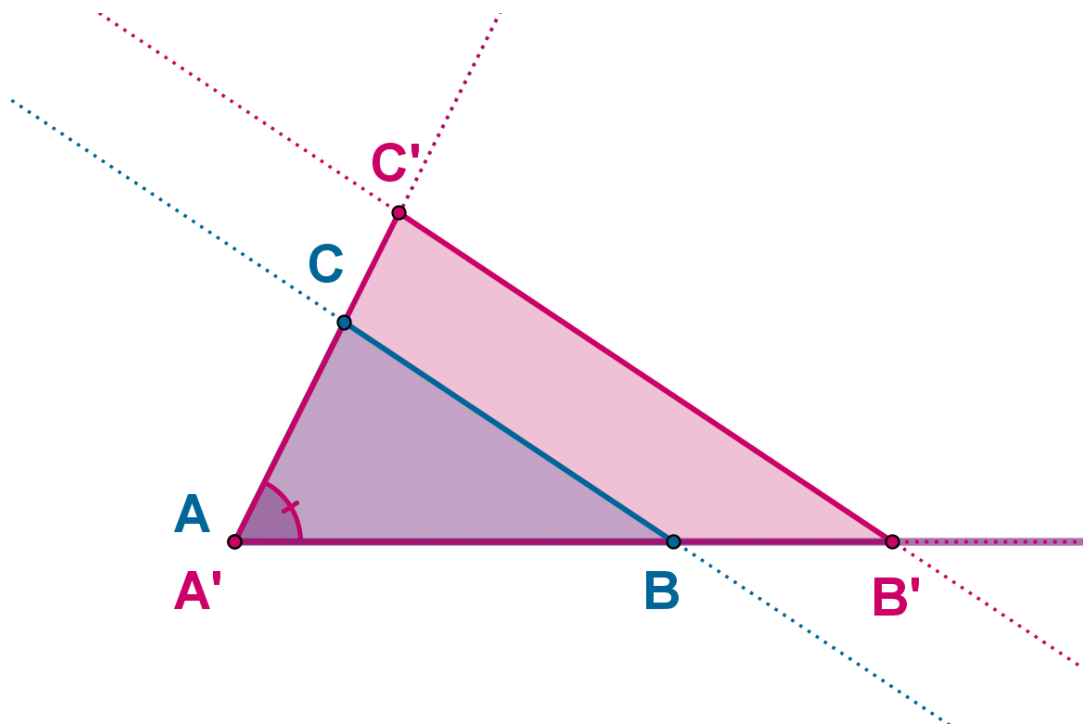


Fig.9

7.3 Triángulos semejantes

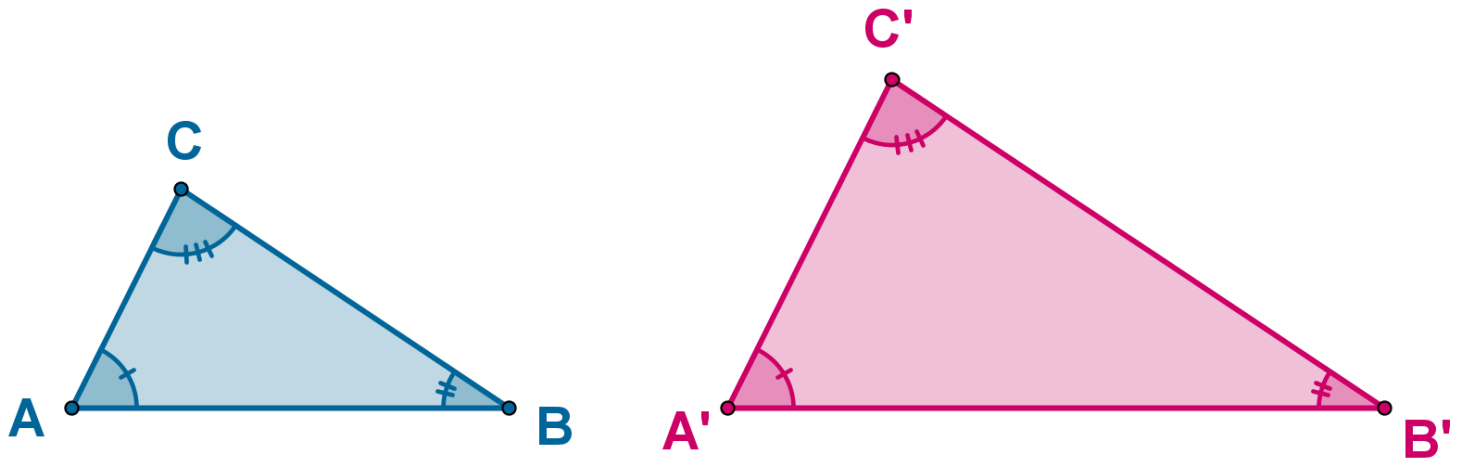


Fig.10

Los triángulos ABC y A'B'C son semejantes, entonces sus ángulos homólogos son iguales:

$$\begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \end{array}$$

Y se cumple también que sus lados homólogos son proporcionales.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \quad (10)$$

Estas igualdades serán la clave para la determinación de la tercera ecuación buscada

8-DETERMINACIÓN DE LA TERCERA ECUACIÓN

Para facilitar la comprensión visual del lector, hemos reproducido nuevamente la Fig.7 para ver en detalle los dos triángulos semejantes.

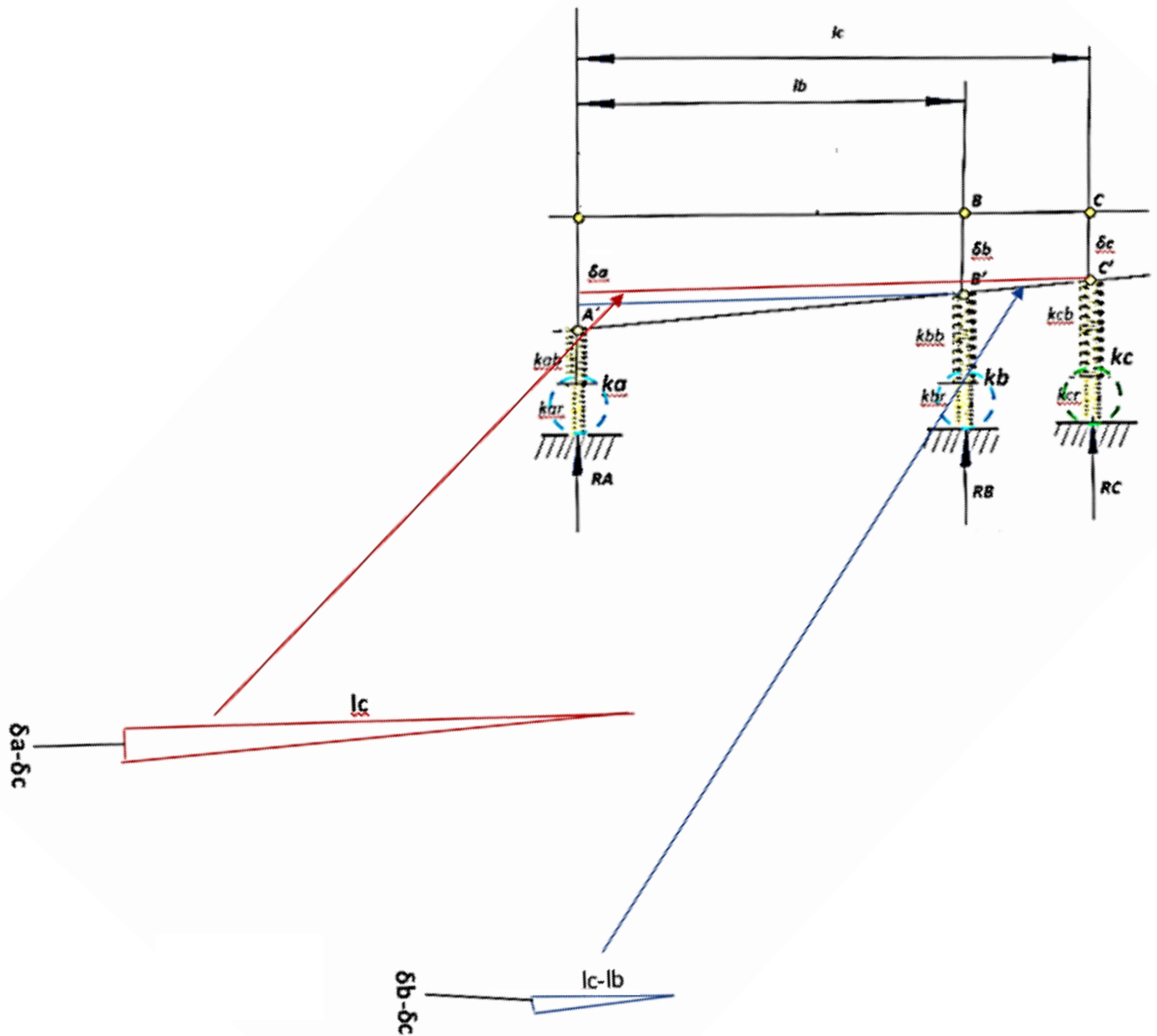


Fig. 11

Del análisis de los triángulos de la Fig.11:

$$\frac{\partial a - \partial c}{lc} = \frac{\partial b - \partial c}{lc - lb}$$

$$(lc - lb)(\partial a - \partial c) = lc(\partial b - \partial c)$$

$$\text{Siendo } \partial = \frac{R}{k} \rightarrow (lc - lb) \left(\frac{RA}{ka} - \frac{RC}{kc} \right) = lc \left(\frac{RB}{kb} - \frac{RC}{kc} \right)$$

Operando:

$$\left(\frac{lc-lb}{ka} \right) RA - \frac{lc}{kb} RB + \frac{lb}{kc} RC = 0 \quad (11)$$

El siguiente cuadro nos muestra finalmente el sistema de tres ecuaciones con las tres incógnitas, RA, RB y RC.

$$RA + RB + RC = P$$

Ecuación (1)

$$RB + \frac{lc}{lb} RC = \frac{lp}{lb} P$$

Ecuación (2)

$$\left(\frac{lc-lb}{ka} \right) RA - \frac{lc}{kb} RB + \frac{lb}{kc} RC = 0$$

Ecuación (11)

Este sistema de ecuaciones puede resolverse matemáticamente de varias maneras, por ejemplo, con el **método de los determinantes**.

Agregamos un link que puede resultar de utilidad para facilitar el cálculo:

http://es.onlinemschool.com/math/assistance/equation/combined_equations/

9-ESTUDIO DE ALGUNOS CASOS REALES

Nos proponemos calcular ahora las reacciones R_A , R_B y R_C del camión mostrado en la siguiente figura, tomando varias constantes elásticas y distancias entre ejes, para estudiar su influencia en el resultado.

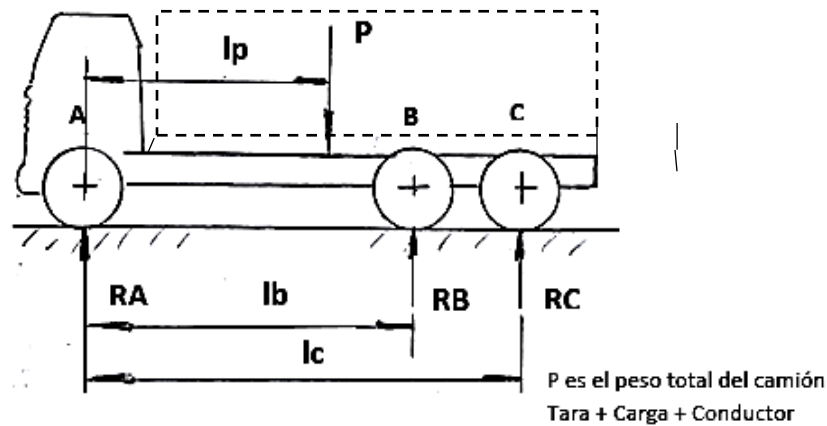


Fig.12

Procederemos a la resolución de las ecuaciones (1), (2) y (11) considerando cuatro juegos de valores de coeficientes elásticos k_a , k_b y k_c con las mismas dimensiones del camión, nominados como casos (a), (b), (c), y (d) y el quinto caso, (e) con una distancia entre ejes más corta que la de los casos anteriores.

Es de destacar que cualquiera de los valores que modifiquemos tendrá influencia sobre las tres reacciones vinculares.

Calcularemos también las deflexiones δ aplicando la fórmula $\delta_i = R_i / k_i$ para cada caso considerado.

Caso a

P = 23800 kgf	ka = 31 kgf/mm	(lc-lb)/ka = 1350/31
lp = 3131 mm	kb = 35 kgf/mm	lc/kb = 4850/35
lb = 3500 mm	kc = 35 kgf/mm	lc/lb = 4850/3500
lc = 4850 mm	lb/kc = 3500/35	lp/lb = 3131/3500

RA = 6057,6 kgf	δa = 195,4 mm
RB = 8542,7 kgf	δb = 244,1 mm
RC = 9199,7 kgf	δc = 262,8 mm

Caso b

P = 23800 kgf	ka = 31 kgf/mm	(lc-lb)/ka = 1350/31
lp = 3131 mm	kb = 58 kgf/mm	lc/kb = 4850/58
lb = 3500 mm	kc = 58 kgf/mm	lc/lb = 4850/3500
lc = 4850 mm	lb/kc = 3500/58	lp/lb = 3131/3500

RA = 5848,6	δa = 188,7 mm
RB = 9293,7 kgf	δb = 160,2 mm
RC = 8657,7 kgf	δc = 149,3 mm

Caso c

P = 23800 kgf	ka = 31 kgf/mm	(lc-lb) /ka = 1350/31
lp = 3131 mm	kb = 78 kgf/mm	lc/kb = 4850/78
lb = 3500 mm	kc = 78 kgf/mm	lc/lb = 4850/3500
lc = 4850 mm	lb/kc = 3500/78	lp/lb = 3131/3500

RA = 5678,2 kgf	δa = 183,2 mm
RB = 9905,9 kgf	δb = 127,0 mm
RC = 8215,9 kgf	δc = 105,3 mm

Caso d

P = 23800 kgf	ka = 70 kgf/mm	(lc-lb) /ka = 1350/70
lp = 3131 mm	kb = 77 kgf/mm	lc/kb = 4850/77
lb = 3500 mm	kc = 71 kgf/mm	lc/lb = 4850/3500
lc = 4850 mm	lb/kc = 3500/71	lp/lb = 3131/3500

RA = 5971,3 kgf	δa = 85,3 mm
RB = 8853,0 kgf	δb = 115,0 mm
RC = 8975,7 kgf	δc = 126,4 mm

Caso e (*)

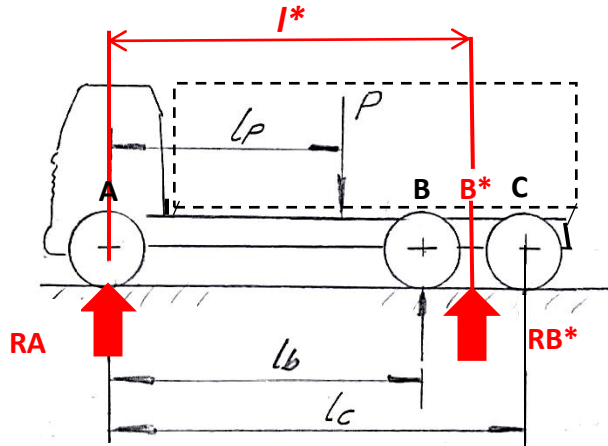
P = 23800 kgf	ka = 31 kgf/mm	(lc-lb) /ka = 1350/31
lp = 2981 mm	kb = 78 kgf/mm	lc/kb = 4650/78
lb = 3300 mm	kc = 78 kgf/mm	lc/lb = 4650/3300
lc = 4650 mm	lb/kc = 3300/78	lp/lb = 2981/3300

RA = 5654,3 kgf	δa = 182,4 mm
RB = 9948,1 kgf	δb = 127,5 mm
RC = 8197,7 kgf	δc = 105,1 mm

(*) El caso (e) es el de un camión con distancia entre ejes de 3300 mm. Distancias entre ejes cortas como ésta, en general están previstas para tractor con plato de enganche o aplicaciones especiales.

10-COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS ANTERIORES CON EL CÁLCULO SIMPLIFICADO

Para el mismo camión de la Fig. 12 aplicaremos ahora el método simplificado, que consiste en **no tomar en cuenta la elasticidad de los vínculos en A, B y C y considerar el sistema como si fuera una viga apoyada en dos puntos: A y B***. El punto B* está ubicado en este caso en el centro de ambos ejes traseros A y B.



Casos (a), (b), (c) (d)

$$l^* = (l_b + l_c) / 2 = (3500 + 4850) / 2 = 4175 \text{ mm}$$

$$RB^* = P \cdot l_p / l^* = 23800 \times 3131 / 4175 = 17848,6 \text{ kgf}$$

$$RA = P - RB^* = 23800 - 17848,6 = 5951,4 \text{ kgf}$$

$$RB = RC = RB^* / 2 = 8924,3 \text{ kgf}$$

Caso (e)

$$l^* = (l_b + l_c) / 2 = (3300 + 4650) / 2 = 3975 \text{ mm}$$

$$RB^* = P \cdot l_p / l^* = 23800 \times 2981 / 3975 = 17848,5 \text{ kgf}$$

$$RA = P - RB^* = 23800 - 17848,6 = 5951,5 \text{ kgf}$$

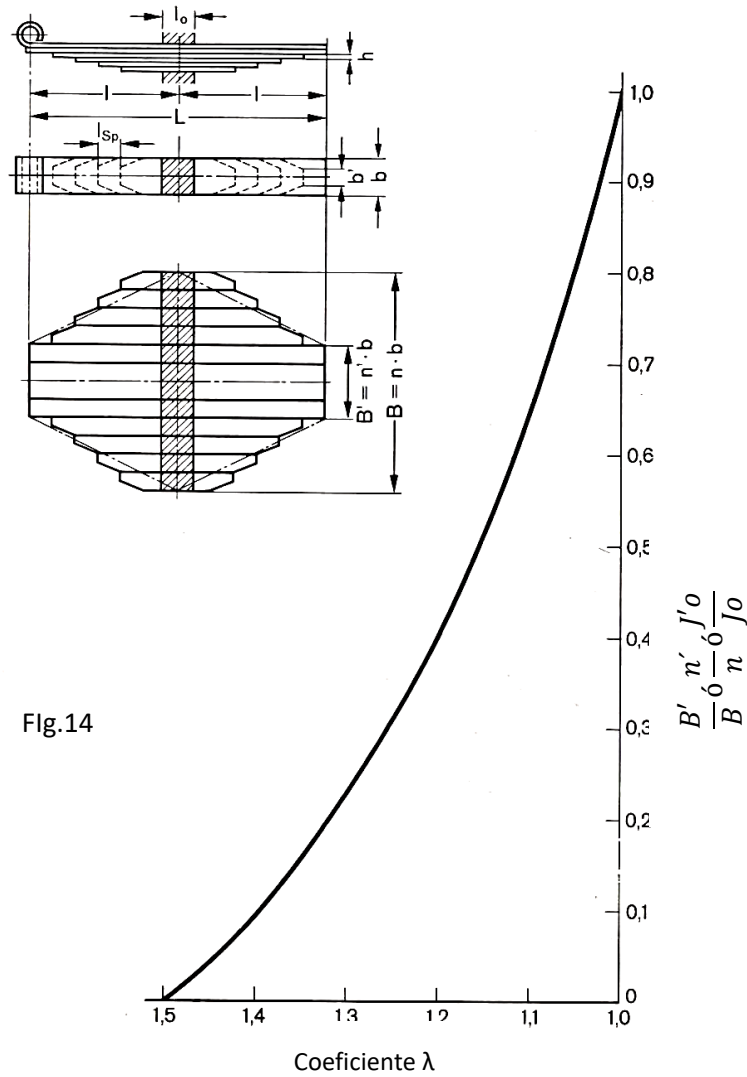
$$RB = RC = RB^* / 2 = 8924,3 \text{ kgf}$$

Comentarios

- Por ejemplo, las diferencias entre los valores obtenidos mediante el cálculo hiperestático para el **caso (e)** analizado y los obtenidos por el método aproximado, ampliamente extendido, son significativas. La diferencia porcentual entre el peso real sobre el eje B (9948,1 kgf) y el correspondiente al método simplificado (8924,3 kgf) es del 10,3 %
- También en el **caso (e)** la diferencia real de peso en los ejes traseros B y C es de 1750,4 kgf, mientras que en el caso del cálculo simplificado las reacciones serían de igual valor.
- Las diferencias entre las deflexiones estáticas en los casos estudiados entre sí son elevadas; para δ_a en el eje delantero, entre la hallada en el **caso (a)** y la del **caso (d)** es de 195,4 mm contra 85,3 mm.
- En el caso (d), las reacciones RA, RB y RC son muy similares a las obtenidas con el método aproximado, pero **para alcanzar ese resultado hubo que prever que los coeficientes de elasticidad en los ejes traseros B y C sean diferentes.**
- Las diferencias entre los valores obtenidos mediante el cálculo simplificado y los reales son cada vez mayores a medida que disminuye la distancia entre ejes l_b y/o aumenta la distancia entre los ejes B y C. Esto lo hemos verificado estudiando varios ejemplos, no detallados aquí para no fatigar al lector

11-DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES ELÁSTICOS PARA UN CAMIÓN DADO

Si en lugar de asignar valores a un vehículo teórico, trabajáramos sobre un camión real, deberíamos calcular los coeficientes de elasticidad de las ballestas y de las ruedas. Para ello, comencemos con el cálculo de la constante elástica de una ballesta:



La fórmula para calcular la constante elástica de la ballesta como la mostrada en la figura 14 es la siguiente:

$$c = \frac{48 \cdot E \cdot J_0}{\lambda \cdot L'^3} \quad (12)$$

Referencias:

L = largo de la ballesta [mm]

n = número de hojas

L' = largo efectivo de la ballesta $L'=L-l_0$ [mm]

c = constante elástica de la ballesta $\frac{kgf}{mm}$

h = espesor de la hoja [mm]

b = ancho de las hojas [mm]

E = módulo de elasticidad del acero = $2,1 \cdot 10^4 \frac{kgf}{mm^2}$

J_0 = momento de inercia de todas las hojas en la sección media de la ballesta [mm⁴]

λ = Coeficiente que depende del tipo de hojas y su geometría. Para el tipo de ballesta mostrado corresponde la curva de Fig.12

A continuación, calcularemos la constante elástica K_b de una ballesta cuyas características detallamos a continuación:

$L = 1650$ mm

$n = 10$

$n' = 2$

$b = 90$ mm

$h = 12$ mm

$\lambda = 1,33$ (se extrae del gráfico para $n'/n = 0,29$)

El momento de inercia $J_0 = \frac{90 \cdot 10 \cdot 12^3}{12} = 129.600 \text{ mm}^4$

Aplicamos entonces la fórmula (12) y obtenemos

$c = 21,9 \text{ kgf/mm}$

Siendo $K_b = 2 \times c$ pues las dos ballestas actúan como dos resortes en paralelo.

Finalmente,

$$k_b = 43,8 \text{ kgf/mm}$$

(13)

Calcularemos ahora, de manera aproximada, el coeficiente de elasticidad del neumático. Para nuestro ejemplo, (ver Fig.14), suponemos que estudiamos el eje delantero (rodado simple).

Del manual del fabricante elegido como referencia, *Michelin*, vemos que, para un peso estimado de 6000 kgf corresponden los siguientes valores:

Marca de neumático: *Michelin*

Tipo: 11.00 R 20 KZE

Peso nominal de cálculo para el eje: 6000 kgf

Presión de inflado aproximada: 6,7 bar que corresponde por interpolación entre 6,5 y 7,0 bar en la tabla de presiones de Michelin para el neumático 11.00 R 20 KZE a 6055,9 kgf

Radio R sin carga: 1081mm/ 2 = 540,5 mm

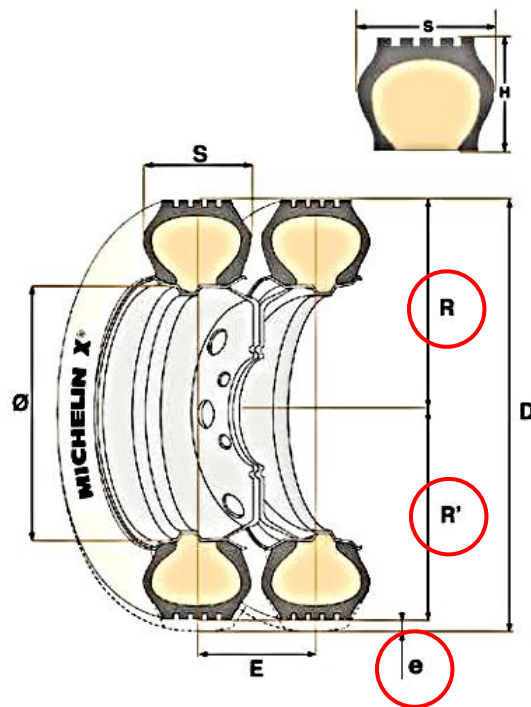
Radio R' bajo carga estática: 502 mm

Deflexión $\delta r = 38,5$ mm (e en la denominación de Michelin)

El coeficiente de elasticidad del par de neumáticos delanteros será el doble del correspondiente a una rueda:

$$K_r = 2 \frac{\frac{6055,9}{2}}{38,5} = 157,3 \text{ kgf/mm}$$

(14)



- S** Anchura de sección
- R** Radio sin carga
- R'** Radio con carga
- D** Diámetro exterior
- Ø** Diámetro de la llanta (diámetro entre talones de la cubierta)
- E** Distancia mínima de gemelado
- e** Aplastamiento
- H** Altura del neumático

Fig.15

Por último, determinamos el coeficiente de elasticidad del par de ruedas del eje delantero aplicando la fórmula (5):

$$k = \frac{kb \cdot kr}{kb + kr} = \frac{43,8 \cdot 157,3}{43,8 + 157,3}$$

$$k = 34,3 \frac{kgf}{mm}$$

(15)

12-SECUENCIA PARA LA DETERMINACIÓN DE LAS REACCIONES VINCULARES

Trataremos de ordenar las tareas a realizar para determinar las reacciones vinculares de un camión o tractor de más de dos ejes, caso hiperestático. Aquí explicamos el caso de tres ejes. Para más ejes la secuencia es similar, ver Fig.16.

Suponemos que disponemos de una unidad con su carrocería, pero sin carga.

- Determinamos P_t y la cota l_t , según el procedimiento explicado en el **Título 6**, efectuando la pesada sin el conductor y con los depósitos de combustible a media carga.

- Con los datos de las ballestas y los neumáticos, calculamos los coeficientes de elasticidad k_a , k_b y k_c , ver **Título 11**.

Siendo:

P_t = Peso del camión vacío o tara, con los tanques de combustible a medio repostar [kgf]

P_c = Peso del conductor posicionado en su asiento, que estimamos en 80 kgf

P_n = Peso de la carga neta [kgf]

l_p = distancia de la recta de acción de la resultante P con respecto a A

$$P = P_t + P_c + P_n \quad (16)$$

$$\sum MA = P_c \cdot l_c + P_t \cdot l_t + P_n \cdot l_n = l_p \cdot P$$

$$l_p = \frac{P_c \cdot l_c + P_t \cdot l_t + P_n \cdot l_n}{P} \quad (17)$$

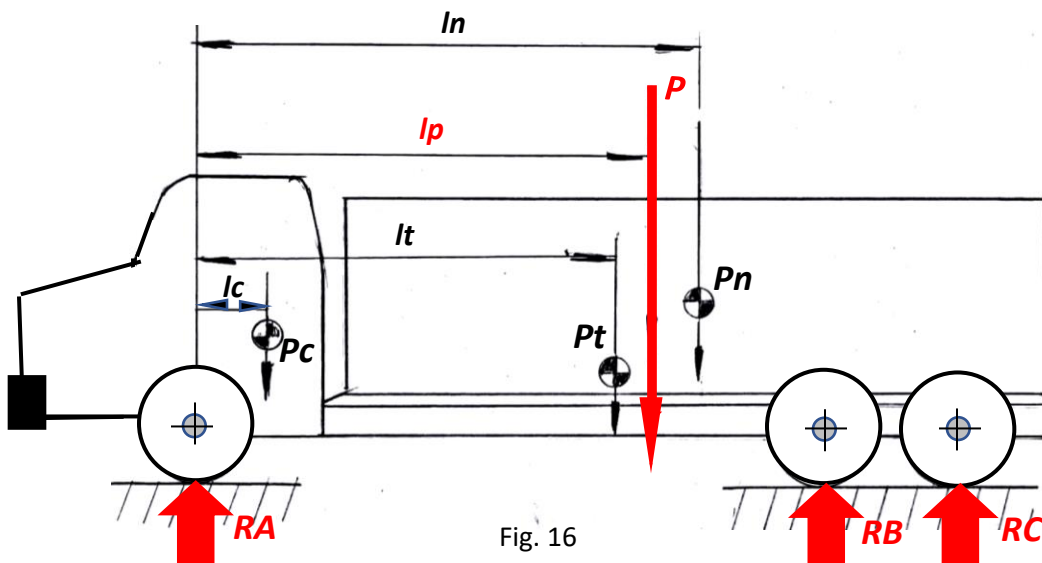


Fig. 16

- Finalmente, calculamos las reacciones R_A , R_B y R_C aplicando las ecuaciones (1), (2) y (11) reemplazando en las mismas los valores de P (peso del camión en orden de marcha) y l_p determinados con las ecuaciones (16) y (17).

13-GENERALIZACIÓN DEL MÉTODO DE CÁLCULO PARA EL CASO DE MÚLTIPLES EJES

Cuando el número de ejes del vehículo exceda de dos, la determinación de las reacciones vinculares R_A , R_B , R_C ... R_i podrá efectuarse de manera similar a la estudiada hasta aquí para el caso particular de tres ejes.

En todos los casos se deberá tomar en cuenta para la solución del sistema de ecuaciones de casos hiperestáticos la proporcionalidad de las deflexiones elásticas mediante la aplicación de la **semejanza de triángulos según lo explicado en los Títulos 7 y 8.**

14-DISTRIBUCIÓN DE PESOS SOBRE LOS EJES DE CAMIONES ARTICULADOS

14.1 Caso Tractor 4x2 y Semirremolque de dos ejes.

Para determinar la distribución de pesos en vehículos articulados nos vamos a basar en lo estudiado en los títulos anteriores.

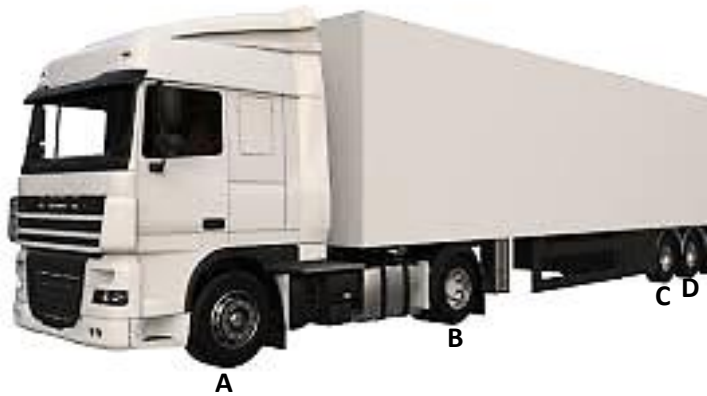


Fig. 17

El caso de un vehículo combinado como el mostrado en la Fig. 17, éste puede asimilarse al conjunto de dos vigas vinculadas entre sí por el plato de enganche en el punto Z, ver Fig. 18.

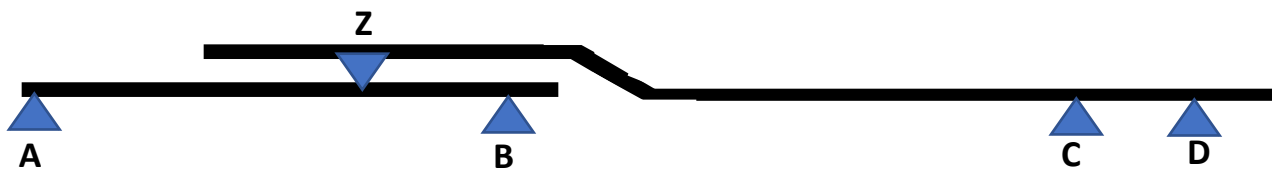


Fig.18

Este caso mostrado se trata de una combinación de tractor 4x2 con semirremolque de dos ejes. Para este caso como para cualquier disposición de ejes, tanto del tractor como del semirremolque, nos valdremos de un artificio que denominaremos **coeficiente de elasticidad ficticio**.

El **coeficiente ficticio** consiste en considerar el tractor en su conjunto como un apoyo elástico en el punto Z con una constante de elasticidad equivalente a la de **todo el conjunto tractor**, que denominaremos k_z .

De esta manera, supondremos que el semirremolque estaría sustentado por un apoyo elástico en Z y otros dos en C y D respectivamente. El cálculo, de esta manera, se reduce a aplicar las fórmulas desarrolladas anteriormente para la viga \overline{ZCD} .

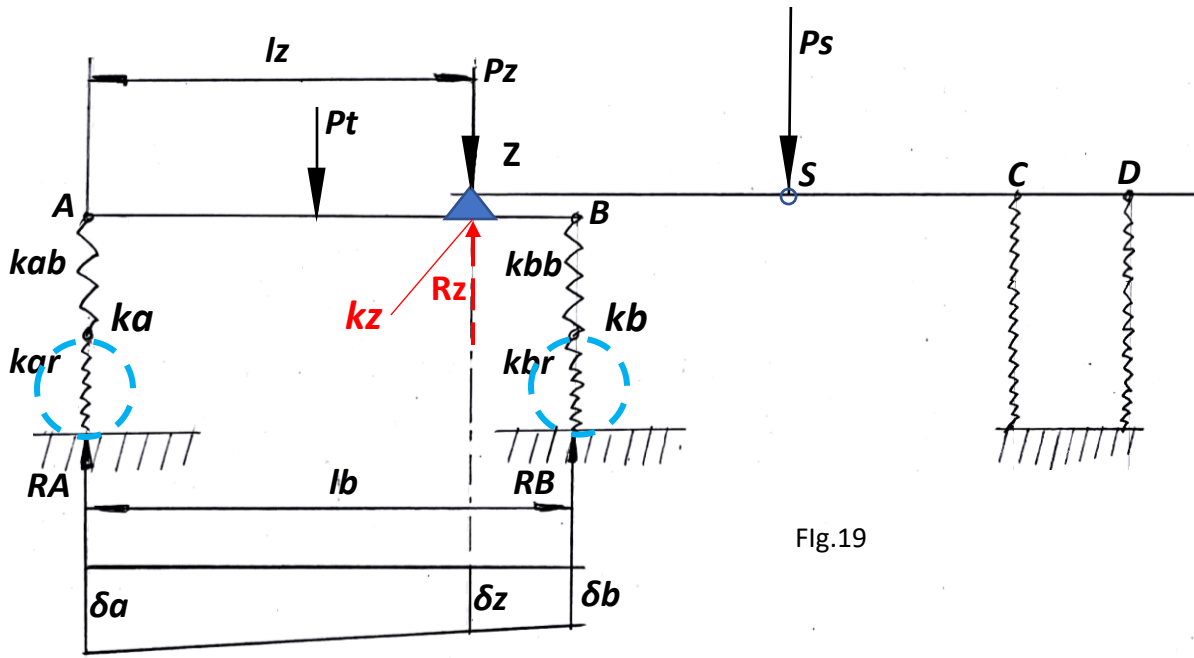


Fig.19

14.1.1 Determinación del coeficiente ficticio k_z

$$\frac{\partial z - \partial b}{l_b - l_z} = \frac{\partial a - \partial z}{l_z}$$

$$l_z(\delta z - \delta b) = (l_b - l_z)(\delta a - \delta z)$$

$$l_z \cdot \partial z - l_z \cdot \partial b = l_b \cdot \partial a - l_b \cdot \partial z - l_z \cdot \partial a + l_z \cdot \partial z$$

$$\partial z = \frac{l_z \cdot \partial b + l_b \cdot \partial a - l_z \cdot \partial a}{l_b} = \frac{l_z(\partial b - \partial a) + l_b \cdot \partial a}{l_b} = \frac{l_b \cdot \partial a - l_z(\partial a - \partial b)}{l_b} = \frac{P_z}{k_z}$$

$$k_z = \frac{P_z \cdot l_b}{l_b \cdot \partial a - l_z(\partial a - \partial b)}$$

$$k_z = \frac{P_z \cdot l_b}{l_b \left(\frac{RA}{ka} \right) - l_z \left(\frac{RA}{ka} - \frac{RB}{kb} \right)}$$

$$k_z = \frac{P_z' \cdot l_b}{l_b \left(\frac{RA'}{ka} \right) - l_z \left(\frac{RA'}{ka} - \frac{RB'}{kb} \right)} \quad (18)$$

Teniendo como datos l_z , l_b , k_{ab} , k_{ar} , k_{bb} , k_{br} , **asignamos un valor cualquiera a P_z , que denominamos P_z'** . Con ese valor calculamos con las (19) y (20) RB' y RA' . Calculamos k_a y k_b con las fórmulas (6) y (7), y por último introducimos los valores calculados en la expresión (18) y obtenemos k_z . **Nótese que utilizamos la nomenclatura P_z' , RA' y RB' como valores auxiliares para diferenciarlas de P_z , RA y RB que serán los valores finales de nuestro cálculo. (Ver Apéndice).**

Para la viga simplemente apoyada AB, aplicando la fuerza auxiliar P_z' :

$$\sum MA = 0$$

$$R_z' \cdot l_z - R_B' \cdot l_b = 0$$

$$R_B' = \frac{P_z' \cdot l_z}{l_b} \quad (19)$$

$$R_A' = P_z' - R_B' \quad (20)$$

14.1.2 Cálculo de las reacciones vinculares totales en los ejes A, B, C y D

No nos detendremos aquí en la determinación detallada de cada una de las reacciones mencionadas puesto que surgen fácilmente aplicando lo visto anteriormente. Solamente listamos una secuencia para la resolución.

- Una vez desenganchado, determinamos P_{st} tara del semirremolque, utilizando un método similar al explicado en el **Título 6**, en este caso situando las patas de apoyo fuera de la balanza y uno solo de los ejes del semirremolque sobre la misma para resolver el problema como un caso isostático.
- Calculamos seguidamente R_z , R_C y R_D aplicando un sistema de tres ecuaciones homólogas a las (1), (2) y (11), siendo P_s la resultante de la tara (P_{st}) más la carga del semirremolque (P_n). P_z es la fuerza actuante sobre el plato de enganche en Z. El coeficiente de elasticidad en el apoyo Z es el coeficiente ficticio k_z . R_z tiene la misma magnitud que P_z pero sentido contrario.
- El paso siguiente es calcular R_A y R_B del tractor considerando P_z que es la acción del semirremolque sobre el tractor.
- Hallamos la resultante P_t de las siguientes fuerzas: P_z , P_{ch} (tara del chasis) y P_c (peso del conductor).
- Por último calculamos R_A y R_B , aplicando las ecuaciones de equilibrio $\sum M = 0$ y $\sum F_i = 0$ por ser éste un caso isostático.

14.2 Caso Tractor 6x2 ó 6x4 y semirremolque de dos ejes.

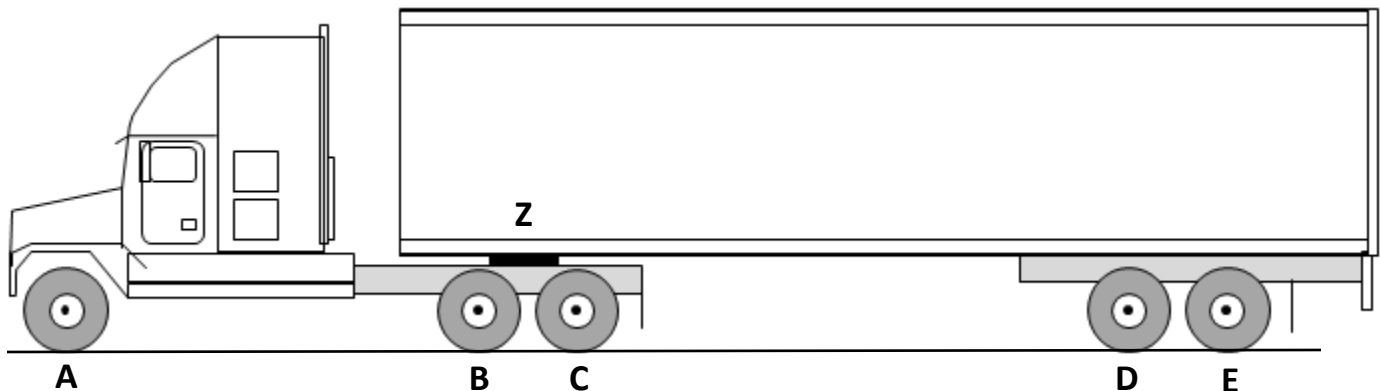


Fig.20

El caso de un vehículo combinado como el mostrado en la Fig. 20, puede asimilarse al conjunto de dos vigas vinculadas entre sí por el plato de enganche en el punto Z, ver Fig.21

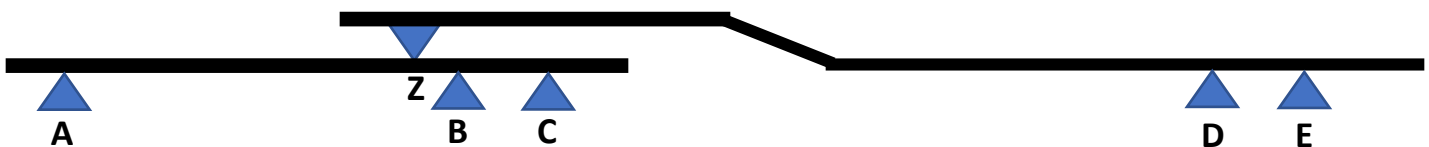


Fig.21

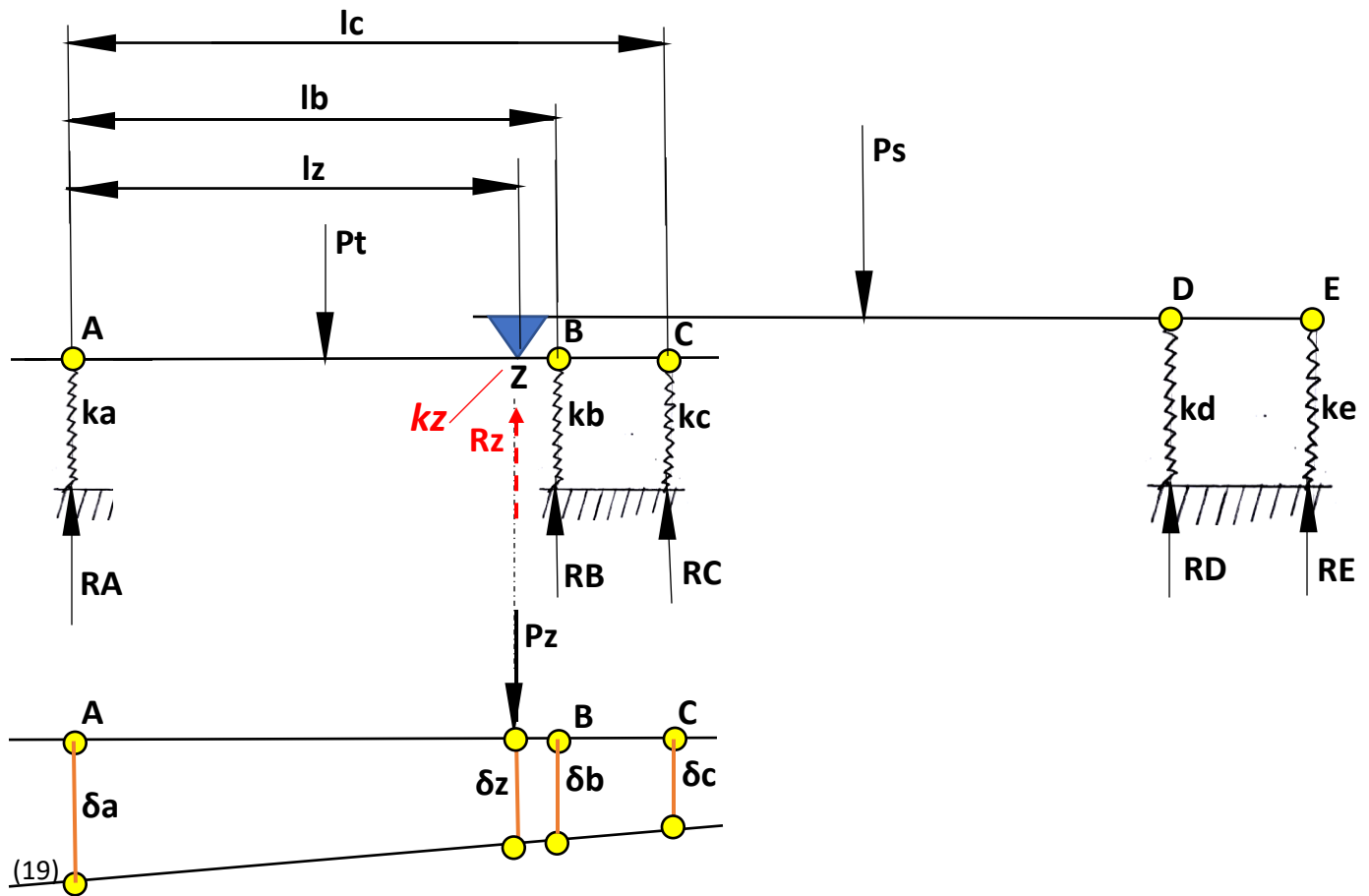


Fig.22

La resolución de este sistema hiperestático combinado, consiste en considerar al tractor 6x2, soportado por los apoyos elásticos A, B y C como si fuera un solo apoyo elástico ficticio del semirremolque al que le asignamos un **coeficiente de elasticidad ficticio kz** y luego resolver el problema determinando las reacciones de vínculo Rz , RD y RE .

13.2.1 Determinación del coeficiente ficticio kz

Nos referiremos a la Fig.22. Aplicando la semejanza de triángulos, tendremos:

$$\frac{\partial z - \partial b}{lb - lz} = \frac{\partial b - \partial c}{lc - lb} \quad \frac{(lb - lz)(\partial b - \partial c)}{(lc - lb)} + \partial b = \partial z = \frac{Pz}{kz}$$

$$kz = \frac{Pz(lc - lb)}{(lb - lz)(\partial b - \partial c) + \partial b(lc - lb)}$$

$$kz = \frac{Pz(lc - lb)}{lz \left(\frac{RC}{kc} - \frac{RB}{kb} \right) - lb \frac{RC}{kc} + lc \frac{RB}{kb}}$$

$$kz = \frac{Pz'(lc - lb)}{lz \left(\frac{RC'}{kc} - \frac{RB'}{kb} \right) - lb \frac{RC'}{kc} + lc \frac{RB'}{kb}}$$

(21)

Nótese que utilizamos la nomenclatura Pz' , RA' , RB' y RC' como valores auxiliares, para diferenciarlas de Pz , RA , RB y RC que serán los valores finales de nuestro cálculo. (Ver Apéndice)

Planteamos seguidamente ecuaciones análogas a las ya conocidas (1), (2) y (11) pero en este caso, adecuadas a la nomenclatura de la Fig.22:

$$RA' + RB' + RC' = Pz'$$

(22) Ver ecuación (1)

$$RB' + \frac{lc}{lb} RC' = \frac{lz}{lb} Pz'$$

(23) Ver ecuación (2)

$$\left(\frac{lc-lb}{ka}\right) RA' - \frac{lc}{kb} RB' + \frac{lb}{kc} RC' = 0$$

(24) Ver ecuación (11)

Entonces, teniendo como datos:

$lz, lb, lc, kab, kar, kbb, kbr$ y Pz'

Resolvemos las ecuaciones por el método de los determinantes o utilizando el Calculador

http://es.onlinemschool.com/math/assistance/equation/combined_equations/ asignando un valor a Pz que denominamos Pz' y calculamos mediante las (22), (23) y (24) las reacciones de vínculo RA' , RB' y RC' para dicho valor asignado de Pz .

Finalmente, reemplazando los valores de RA' , RB' y RC' en (21) obtendremos kz .

14.2.2 Cálculo de las reacciones vinculares totales en los ejes A, B, C, D y E

No nos detendremos aquí en la determinación detallada de cada una de las reacciones mencionadas puesto que surgen fácilmente aplicando lo visto anteriormente. Solamente listamos una secuencia para la resolución.

- Una vez desenganchado, determinamos Pst , tara del semirremolque, utilizando un método similar al explicado en el **Título 6** en este caso situando las patas de apoyo fuera de la balanza y uno solo de los ejes del semirremolque sobre la misma.
- Calculamos seguidamente Rz , RD y RE aplicando un sistema de tres ecuaciones homólogas a las (1), (2) y (11), siendo Ps la resultante de la tara (Pst) más la carga del semirremolque (Pn). Pz es la fuerza actuante sobre el plato de enganche en Z. El coeficiente de elasticidad ficticio en Z es kz . Rz tiene la misma magnitud que Pz pero sentido contrario.
- El paso siguiente es calcular RA , RB y RC del tractor considerando Pz que es la acción del semirremolque sobre el tractor.
- Hallamos la resultante Pt de las siguientes fuerzas: Pz , Pch (tara del chasis) y Pc (peso del conductor).
- Por último calculamos RA , RB y RC , aplicando las ecuaciones (1), (2) y (11).

14.3 Caso Tractor 4x2, 6x2 ó 6x4 y semirremolque de tres ejes.

14.3.1 Planteo general

Lo que nos interesa aquí es la distribución de pesos sobre los ejes del semirremolque. La determinación de las reacciones vinculares del tractor ya la hemos estudiado; solamente será necesario determinar el coeficiente de elasticidad ficticio k_z y luego considerar el semirremolque como una viga con cuatro apoyos elásticos.

A continuación mostramos algunas configuraciones de tractores y semirremolques de tres ejes utilizados en la República Argentina.

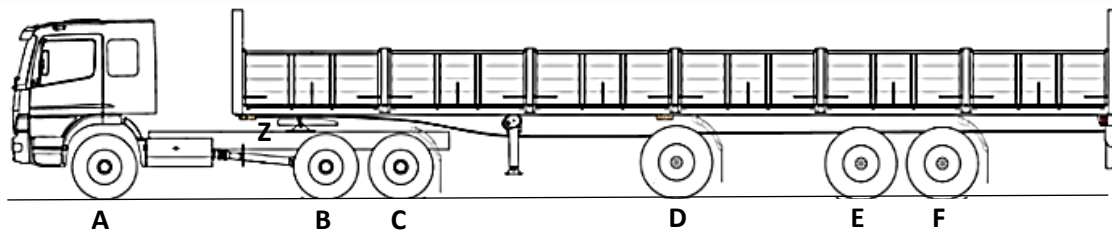


Fig.23

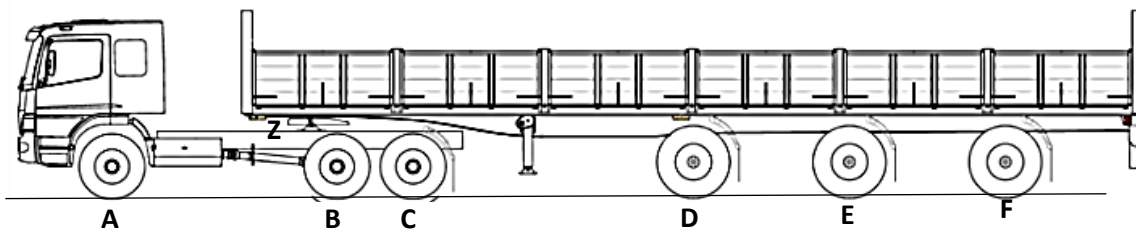


Fig.24

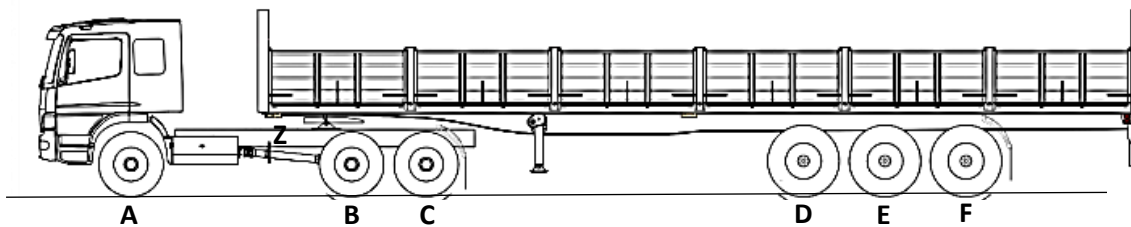


Fig.25

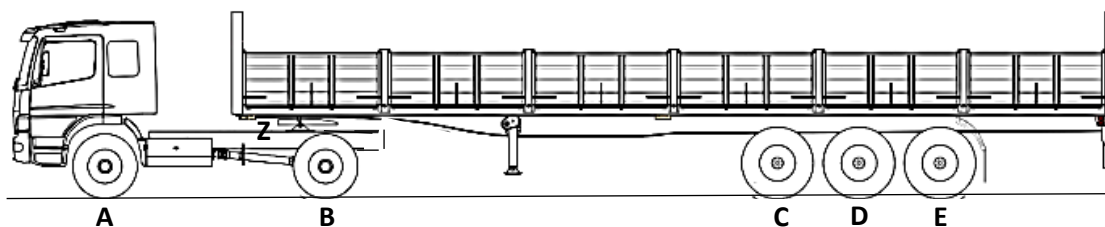


Fig.26

14.3.2 Cálculo de las reacciones vinculares

Para determinar las reacciones vinculares del semirremolque lo tomaremos como una viga apoyada apoyada en Z, D, E y F. Siendo Z el centro del plato de enganche.

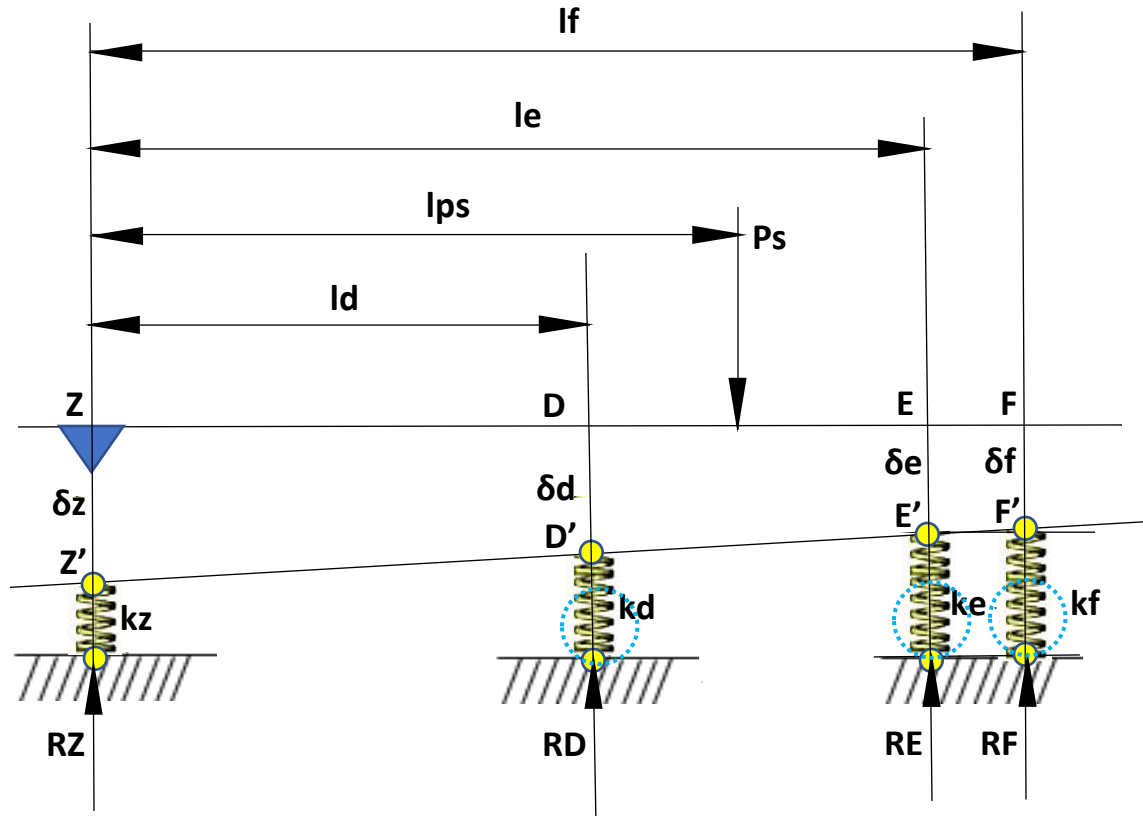


Fig. 27

$$\sum F_i = 0$$

$$R_Z + R_D + R_E + R_F - P_s = 0$$

$$R_Z + R_D + R_E + R_F = P_s$$

(25)

$$\sum M_Z = 0$$

$$-l_d \cdot R_D - l_e \cdot R_E - l_f \cdot R_F + l_{ps} \cdot P_s = 0$$

$$R_D + \frac{l_e}{l_d} R_E + \frac{l_f}{l_d} R_F = \frac{l_{ps}}{l_d} P_s$$

(26)

$$\frac{\partial z - \partial f}{l_f} = \frac{\partial e - \partial f}{l_f - l_e}$$

$$(l_f - l_e)(\partial z - \partial f) = l_f(\delta e - \delta f)$$

$$l_f \cdot \cancel{\partial z} - l_f \cdot \partial f - l_e \cdot \partial z + l_e \cdot \partial f = l_f \cdot \partial e - l_f \cdot \cancel{\partial f}$$

$$lf \frac{RZ}{kz} - le \frac{Rz}{kz} + le \frac{RF}{kf} = lf \frac{RE}{ke}$$

$$lf \frac{Rz}{kz} - le \frac{Rz}{kz} + le \frac{RF}{kf} - lf \frac{RE}{ke} = 0$$

$$\boxed{\frac{(lf - le)}{kz} RZ - \frac{lf}{ke} RE + \frac{le}{kf} RF = 0} \quad (27)$$

$$\frac{(\partial z - \partial f)}{lf} = \frac{(\partial d - \partial e)}{(le - ld)}$$

$$(le - ld)(\partial z - \partial f) = lf(\partial d - \partial e)$$

$$le \cdot \partial z - le \cdot \partial f - ld \cdot \partial z + ld \cdot \partial f = lf \cdot \partial d - lf \cdot \partial e$$

$$le \cdot \partial z - le \cdot \partial f - ld \cdot \partial z + ld \cdot \partial f - lf \cdot \partial d + lf \cdot \partial e = 0$$

$$le \frac{RZ}{kz} - le \frac{RF}{kf} - ld \frac{RZ}{kz} + ld \frac{RF}{kf} - lf \frac{RD}{kd} + lf \frac{RE}{ke} = 0$$

$$\boxed{\frac{(le - ld)}{kz} RZ - \frac{lf}{kd} RD + \frac{lf}{ke} RE - \frac{(le - ld)}{kf} RF = 0} \quad (28)$$

15-APÉNDICE

- La decisión de utilizar o no el método simplificado (es decir, sin considerar la elasticidad de los vínculos) para la determinación de las reacciones vinculares dependerá de cada caso en particular y de la experiencia del Ingeniero en el tratamiento de problemas similares. **Siempre será un riesgo calcular valores con errores cuando no se conozca la magnitud de los mismos.**
- Dado que las ecuaciones vistas son de relativa complejidad algebraica, la determinación de los distintos valores como coeficientes de elasticidad, deflexiones elásticas y reacciones vinculares ofrecen algo de dificultad, sin embargo, sería muy sencillo diseñar un **software para simplificar los cálculos.**
- Tanto la determinación de la tara P_t y la cota l_t correspondientes al camión y la tara P_{ts} y la cota l_{ts} correspondientes al semirremolque **deberían ser datos especificados por los fabricantes**, ver Fig. 28 y 29. Si así no fuera, habría que recurrir al método de la balanza ya explicado.

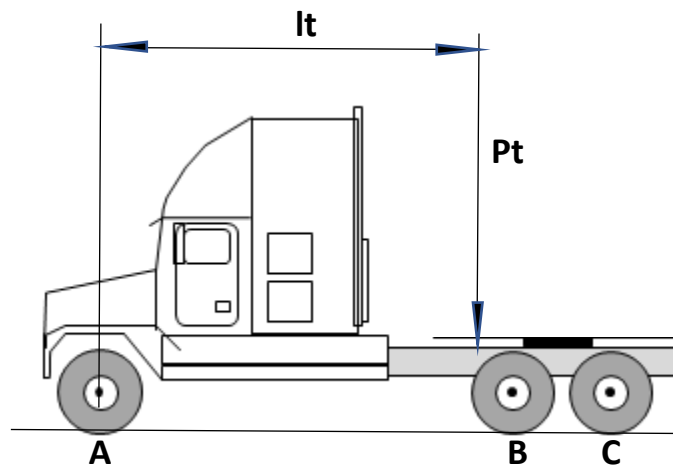


Fig. 28

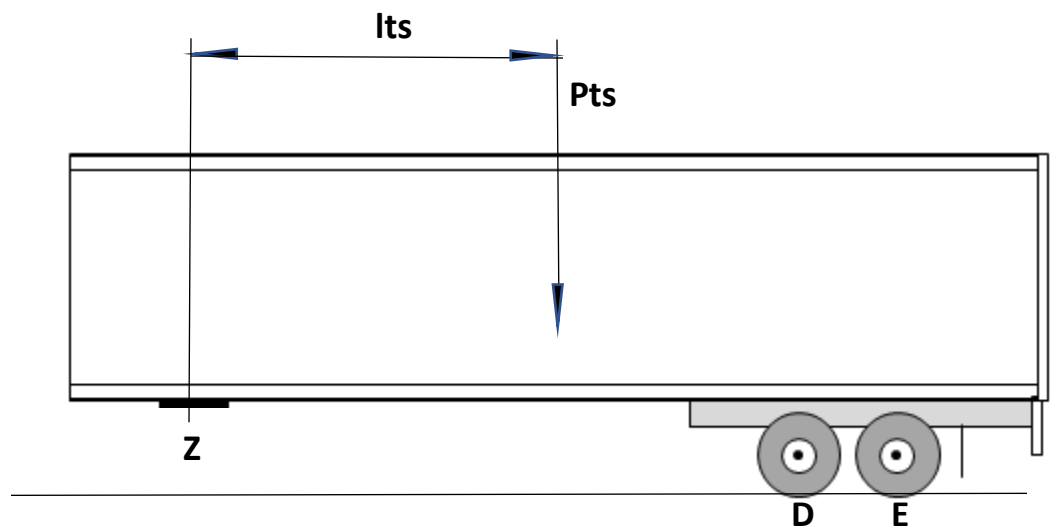


Fig.29

- Para la determinación del coeficiente ficticio k_z , hemos introducido un valor arbitrario para P_z que llamamos P_z' . Con este valor hemos calculado las reacciones vinculares RA' , RB' , RC' , etc. La justificación de esta metodología es que las ecuaciones de equilibrio son de primer grado, por lo tanto, las reacciones vinculares son directamente proporcionales a las cargas y cualquiera sea ésta el coeficiente k_z no varía.

Veamos un ejemplo práctico, para el semirremolque de la Fig. 27, supongamos los siguientes valores:

$$l_p = 3131 \text{ mm}$$

$$l_b = 3500 \text{ mm}$$

$$l_c = 4850 \text{ mm}$$

$$l_z = 3450 \text{ mm}$$

$$k_a = 70 \text{ kgf/mm}$$

$$k_b = 77 \text{ kgf/mm}$$

$$K_c = 71 \text{ kgf/mm}$$

De las ecuaciones (25), (26), (27) y (28)

$$\text{Para } P_z' = 11900 \text{ kgf} \quad \Rightarrow \quad RA' = 2985,7 ; RB' = 4426,5 ; RC' = 4487,9 \text{ kgf}$$

$$\text{Para } P_z' = 23800 \text{ kgf} \quad \Rightarrow \quad RA' = 5971,3 ; RB' = 8853,0 ; RC' = 8975,7 \text{ kgf}$$

Para cualquiera de los dos juegos de valores de las reacciones de vínculo que tomemos para introducir en la (21) que reescribimos seguidamente, **el resultado de k_z es el mismo: 207,9 kgf/mm**

$$k_z = \frac{P_z'(l_c - l_b)}{l_z \left(\frac{RC'}{k_c} - \frac{RB'}{k_b} \right) - l_b \frac{RC'}{k_c} + l_c \frac{RB'}{k_b}} \quad (21)$$

- El diseño de las configuraciones tractor más semirremolque y el cálculo de las reacciones vinculares pondrá a prueba la experiencia del ingeniero interviniente. Pueden darse muchos casos, a saber:

a) **Estudiar un conjunto tractor más semirremolque dado, con todas las dimensiones definidas y predeterminadas.** En este caso solamente podemos aplicar las fórmulas y calcular las reacciones vinculares. Si alguna de las reacciones excediera el máximo admisible habría que reducir la carga resultante P_s y de esta manera se reduciría el valor de todas las reacciones vinculares.

b) **Dado un semirremolque y un tractor se solicita posicionar el plato de enganche.** En este caso habría que determinar la mejor ubicación del mismo teniendo en cuenta las dimensiones totales de la combinación y los reglamentos viales, la recomendación del fabricante del chasis tractor y, por supuesto, las reacciones vinculares en cada uno de los ejes.

c) **Si el Ingeniero contara con total libertad para elegir el tractor, el semirremolque y su configuración** el problema se complica algo más, pero le permitiría alcanzar la mejor solución eligiendo la distancia entre ejes del tractor, el tipo de semirremolque, sus dimensiones, la cantidad de ejes, la posición de cada uno y la constante elástica de las suspensiones tanto del tractor como del semirremolque.

